10.1.12 Neurčité výrazy

Předpoklady: 10110

Př. 1: Vypočti limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

Zajímavé. Získali jsme čtyři naprosto rozdílné výsledky, přestože přímým dosazením do všech výrazů získáme to samé: $\frac{x^2}{x}=\frac{0}{0}=\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{0}{0}=\frac{x}{x^3}=\frac{0}{0}=\frac{x^2}{x^3}=\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$

výraz $\frac{0}{0}$ může při výpočtu limit znamenat cokoliv, říkáme mu **neurčitý výraz**

Jak může vyjít pokaždé něco jiného?
Limita nezáleží na hodnotě v bodě, kde ji zjišťujeme, ale na hodnotách okolo tohoto bodu:
Jak se mění hodnoty jednotlivých výrazů můžeme sledovat v tabulce:

	0,1	0,01	0,001	0	-0,001	-0,01	-0,1
$\frac{x^2}{x}$	$\frac{0,1^2}{0,1}=0,1$	$\frac{0,01^2}{0,01}=0,01$	$\frac{0,001^2}{0,001}=0,001$	-	-0,001	-0,01	-0,1
$\frac{2x^2}{3x^2}$	$\frac{2\cdot 0,1^2}{3\cdot 0,1^2}=\frac{2}{3}$	$\frac{2\cdot 0,01^2}{3\cdot 0,01^2}=\frac{2}{3}$	$\frac{2\cdot 0,001^2}{3\cdot 0,001^2}=\frac{2}{3}$	-	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{x}{x^3}$	$\frac{0,1}{0,1^3}=100$	$\frac{0,01}{0,01^3}=10^4$	$\frac{0,001}{0,001^3}=10^6$	-	10^6	10^4	10^2
$\frac{x^2}{x^3}$	$\frac{0,1^2}{0,1^3}=10$	$\frac{0,01^2}{0,01^3}=10^2$	$\frac{0,001^2}{0,001^3}=10^3$	-	-10^3	-10^2	-10

$\Rightarrow$ nezáleží pouze na tom, jestli je v čitateli (nebo jmenovateli) nula, ale hlavně na tom, jak „rychle“ se k ní výrazy v čitateli a jmenovateli blíží

Pohled z jiného úhlu:

k jakému výsledku se snaží dostrkat výsledek nuly v limitě typu $\frac{0}{0}$.

- 0 v čitateli se snaží, aby výsledná hodnota zlomku byla co nejmenší, snaží se, aby se celý zlomek blížil k nule
- 0 ve jmenovateli se snaží, aby výsledná hodnota zlomku byla co největší (při dělení čísly čím dál víc bližšími nule získáváme čím dál větší hodnoty), snaží se, aby se celý zlomek blížil k nekonečnu (nebo mínus nekonečnu)

$\Rightarrow$ výrazy v čitateli a jmenovateli působí proti sobě $\Rightarrow$ vyhraje ten silnější (v předchozích příkladech vyšší mocnina) nebo to skončí remízou výraz $\frac{0}{0}$ není jediným neurčitým výrazem:

například výraz $0 \cdot \infty$ je také neurčitým:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \cdot x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Podobně jako u výrazu $\frac{0}{0}$ i ve výrazu $0 \cdot \infty$ se oba členy snaží dotáhnout výsledek někam jinam, směřují proti sobě a výsledek záleží na tom, který z nich bude silnější (což dopředu nemůžeme vědět).

na druhou stranu výraz $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ neurčitý není (součin nekonečen se rovná zase nekonečnu)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$

Oba členy ve výrazu se snaží dotáhnout výsledek k tomu samému a tak je jasné, k čemu bude směřovat jejich součin

Př. 2: Urči, které z následujících výrazů jsou neurčité. Pokud výrazy neurčité nejsou, rozhodni, čemu se rovnají.

a) $\frac{\infty}{0}$ b) $\infty - \infty$ c) $0 \cdot 0$ d) $\frac{0}{\infty}$ e) $\frac{\infty}{\infty}$ f) $\infty \cdot (-\infty)$

a) $\frac{\infty}{0} = \infty$ (jmenovatel i čitatel se snaží, aby hodnota zlomku byla co největší)

b) $\infty - \infty$ - neurčitý výraz (první člen se snaží dojít k nekonečnu, druhý k mínus nekonečnu)

c) $0 \cdot 0 = 0$ (oba členy v součinu se snaží, aby byl výsledek nulový)

d) $\frac{0}{\infty} = 0$ (oba členy ve výrazu se snaží, aby byl výsledek nulový)

e) $\frac{\infty}{\infty}$ - neurčitý výraz (nekonečno v čitateli táhne zlomek k nekonečnu, nekonečno ve jmenovateli k nule)

f) $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ (výraz můžeme upravit $\infty \cdot (-\infty) = -(\infty \cdot \infty)$, obě nekonečna se snaží dojít k nekonečnu, mínus jenom změní znaménko)

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají s příkladem potíže, diskuse je nutná. Pořád se snažím zdůrazňovat, že je nutné brát výrazy dynamicky (jako cíl kam limitně směřují) a ne jako pouhé dosazení.

Př. 3: Doplň následující věty:

a) Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ potom

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=$ $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=$

b) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ potom

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=$ $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=$

c) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ potom $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=$

d) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ a k konstanta potom $\lim\limits_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=$

e) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ a k konstanta potom $\lim\limits_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=$

a) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ potom $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=+\infty$

b) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ potom $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=+\infty$

c) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ potom $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=-\infty$

d) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ a k konstanta potom:

pro $k>0$ $\lim\limits_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=+\infty$, pro $k<0$ $\lim\limits_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=-\infty$

e) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ a k konstanta potom

pro $k>0$ $\lim\limits_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=-\infty$, pro $k<0$ $\lim\limits_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=+\infty$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti přijdou sami na to, že bodech d) a e) nemohou rovnou napsat výsledek pro všechny možnosti, ostatním to poradím.

Předchozí výsledky nejsou vhodné k pamatování, stačí selský rozum.
S jeho pomocí můžeme určit i další limity:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$ - čitatel zlomku nemá limitu, ale jeho hodnoty jsou v intervalu $\langle -1;1\rangle$, hodnoty jmenovatele se blíží k nekonečnu $\Rightarrow$ celý zlomek se blíží k nule.

Proč se neurčitými výrazy zabýváme právě teď?
Většina našeho počítání limit byla o odstraňování neurčitých výrazů:

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2-2x$ - neurčitý výraz typu: $\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2-2x=\lim\limits_{x\to\infty} x(x-2)$ - určitý výraz typu $\infty\cdot\infty$

Jak jsou jednotlivé funkce silné?
Pokud jde o $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ platí následující řada (od nejslabšího): $\log_a x$, $\sqrt[n]{x}$ (větší n jsou slabší), x^n (větší n jsou silnější), a^x.

Na zbytek hodiny se vrátíme k výpočtům limit. Rozšiřování zlomků můžeme použít i u jiných funkcí než x^n:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}+1}{2^{x-1}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2^{x+1}}{2^x}+\frac{1}{2^x}}{\frac{2^{x-1}}{2^x}+\frac{2}{2^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{2^x}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2^x}}=\frac{2+0}{\frac{1}{2}+0}=4$$

Př. 4: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+2}-2^x}{2^{x-1}-32}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^{x-2}+1}{2^{x+2}-8}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x+2}{3\log x-3}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+2}-2^x}{2^{x-1}-32}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2^{x+2}}{2^x}-\frac{2^x}{2^x}}{\frac{2^{x-1}}{2^x}-\frac{32}{2^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^2-1}{\frac{1}{2}-\frac{32}{2^x}}=\frac{4-1}{\frac{1}{2}-0}=6$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^{x-2}+1}{2^{x+2}-8}=\frac{0+1}{-8}=-\frac{1}{8}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x+2}{3\log x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\log x}{\log x}+\frac{2}{\log x}}{3\frac{\log x}{\log x}-\frac{3}{\log x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{\log x}}{3\cdot 1-\frac{3}{\log x}}=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}$

Mnohdy nejsou úpravy příliš (spíš vůbec) zřejmé:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x}-x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+5x}+x}{\sqrt{x^2+5x}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(x^2+5x\right)-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}=\frac{5}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{5}{2}$$

Pedagogická poznámka: Než spočítám předchozí příklad na tabuli, nechávám studenty limitu hádat. Ještě nikdy se nikdo netrefil (já bych spletl také). Jde o to, aby si studenti uvědomili, že ne vždy je výsledek zřejmý.

Př. 5: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2+2x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}}=\sqrt{\frac{3-0}{1+0}}=\sqrt{3}$

$$\lim_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x+\sqrt{x^2+2x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2+2x\right)}{x+\sqrt{x^2+2x}}=$$

b)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+2\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\frac{-2}{1+\sqrt{1+0}}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}\right]=$$

c) $$=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\frac{(x-3)-(x+1)}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-4\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-4}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=-2$$

Př. 6: Petáková:
strana 154/cvičení 11 e) f)
strana 154/cvičení 12 e) f)
strana 154/cvičení 13 c) d) g) h)

Shrnutí: Z nul a nekonečen můžeme sestavit výrazy, jejichž hodnota není zřejmá, bez bližší znalosti limity.